

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

**Исследование общих свойств совместимой квантовой информации и её
приложение к анализу проблемы Дике**

Дипломная работа

студента 626 группы

Сыча Д. В.

"Допущен к защите"

” ” декабря 2001 г.

зав. кафедрой ОФ и ВП

проф. Макаров В. А.

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

Гришанин Б. А.

Москва 2001

Аннотация

В дипломной работе проведен теоретический анализ одного из важных типов квантовой информации - совместимой информации, являющейся аналогом классической информации Шеннона для квантовых систем. Получен ряд аналитических соотношений и количественных зависимостей и проанализировано их физическое содержание. Исследованы информационные свойства перепутанных белловских и классически коррелированных состояний двухчастичных систем. Рассмотрено два типа совместимой информации — селектированная и неселектированная, и выявлено фундаментальное соотношение между ними. На основе развитых методов выполнен информационный анализ конкретной физической системы, образованной двумя двухуровневыми атомами, взаимодействующими в соответствии с моделью Дике.

Содержание

1 Введение	4
2 Общие свойства совместимой информации	7
2.1 Классическая информация Шеннона	7
2.2 Информационная специфика квантовых событий	9
2.3 Селектированная информация	11
2.4 Неселектированная информация	18
3 Информационный анализ задачи Дике	21
3.1 Задача Дике	21
3.2 Результаты расчетов информации и их обсуждение	22
4 Выводы	30
5 Благодарности	30

1 Введение

За последнее десятилетие в квантовой физике произошли существенные изменения, которые, ни в коей мере не затрагивая её основ, радикально повлияли на оценку роли квантовой физики и её качественного содержания. Если ранее при изучении особых неклассических свойств квантовых систем роль экспериментатора состояла только в создании подходящих условий на макроскопическом уровне — например, с помощью подходящего выбора объекта, воздействия с использованием макроскопических полей, обеспечения необходимой температуры и т. п. — то теперь стало возможным направленное изменение квантовых состояний самих элементарных квантовых систем. Это инициировало развитие целого ряда новых прикладных дисциплин — квантовой криптографии, квантовой связи и физики квантовых вычислений [1–4], использующих неклассические свойства состояний квантовых систем. Детальное обсуждение проявлений квантовой специфики физических систем, лежащей в основе перечисленных приложений, можно найти в современных обзорах [5–10] и монографиях [11–14]. Несмотря на всё многообразие физических механизмов создания, обработки и передачи квантовой информации и её применений, с фундаментальной точки зрения все они основаны на единственном качественно существенном отличии квантовых событий от классических. Это — *некоммутативность* квантовых переменных рассматриваемых систем, которая эквивалентна *неортогональности* их квантовых состояний и связанной с этим невозможности рассмотрения произвольного набора квантовых событий в рамках классической логики — т. н. “несовместимости” неортогональных состояний.

Действительно, для ортогонального набора событий мы можем использовать классическую (двузначную — аристотелеву [15]) логику, лежащую в основе классической физики, в которой справедлив закон исключённого третьего: любое элементарное событие мы можем классифицировать как “*либо A, либо не-A*”.

В квантовой теории состояния системы играют роль элементарных событий. Согласно принципу суперпозиции, помимо ортогональных состояний, существует бесконечное множество неортогональных им состояний, для которых закон исключённого третьего не справедлив: произвольное состояние может давать ненулевые проекции сразу на все состояния, образующие ортогональный базис. Вообще, рассматривая алгебру с операцией сложения в виде линейного объединения подпространств (sp) и операцией умножения в виде пересечения, обнаружим, что уже для трех произвольных неортогональных и несовпадающих друг с другом

состояний не выполняется закон дистрибутивности, являющийся логическим выражением закона исключенного третьего [16].

Неортогональные вектора $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ являются, соответственно, собственными векторами двух некоммутирующих операторов \hat{A}, \hat{B} некоторых физических величин, которые именно по причине неортогональности их собственных квантовых состояний не могут быть измерены совместно.

Даже приведённое простейшее обсуждение выявляет теснейшую связь между свойствами физических величин и соотношениями между соответствующими им квантовыми состояниями. Выявление соотношений непосредственно между состояниями и количественное измерение соответствующей информации, заложенных в этих соотношениях, является объектом теории информации. Рассмотрение взаимодействия квантовой системы с точки зрения обмена квантовой информацией даёт наиболее обобщённую физическую картину этого процесса по отношению к описанию в терминах средних значений избранных динамических переменных.

По сравнению с теорией информации Шеннона в приложении к физике роль квантовой информации представляется значительно более существенной, не позволяющей выделить её в качестве независимой от физики чисто математической дисциплины [17, 18]. В отличие от классических систем, в квантовом случае проблема введения количественной меры квантовой информации не допускает единого решения, а зависит от физического содержания квантового информационного канала.

Ключевое различие между классической и квантовой информацией связано с *совместимостью* или *несовместимостью* состояний, с которыми связана представляющая интерес информация. Состояния различных систем, рассматриваемые в один и тот же момент времени, всегда совместимы, т.к. принадлежат разным пространствам. Двухмоментные же состояния двух различных систем могут быть как совместимы, так и несовместимы, в зависимости от вида преобразования, связывающего эти два момента времени. Этот фактор весьма существенен при рассмотрении основных определений количественных мер квантовой информации.

Наиболее общее деление типов квантовых каналов и соответствующих информационных мер [18] основано на внутренней и взаимной совместимости (т. е. ортогональности — “классичности”) или несовместимости (неортогональности — “неклассичности”) квантовых состо-

яний входа и выхода информационного канала. В результате выделяются следующие четыре основных типа информации:

- *Классическая информация* — все состояния совместимы, и в исходной форме теории информации Шеннона рассматриваются как классические “по умолчанию” [19, 20]. Отметим, однако, что классическая информация всегда может быть передана по квантовому каналу и также представляет определённый интерес в квантовой физике. Классический канал задаётся условным распределением вероятностей $p(y|x)$ состояний выхода y при фиксированных состояниях входа x .
- *Полуклассическая информация* — вся информация на входе задаётся классическими состояниями λ , а состояния выхода содержат внутреннюю квантовую неопределённость в форме всех квантовых состояний в гильбертовом пространстве H , которые автоматически совместимы с состояниями входа. Квантовый канал в общем случае описывается ансамблем смешанных квантовых состояний $\hat{\rho}_\lambda$, зависящих от классического параметра λ [21–23]. Переменные λ эквивалентны входным переменным x , множество всех волновых функций $\psi \in H$ — выходным состояниям y , а матрица плотности $\hat{\rho}_\lambda$ — условному распределению вероятностей $p(y|x)$ классического канала.
- *Когерентная информация* — пространства состояния входа и выхода содержат внутреннюю квантовую неопределённость, взаимно несовместимы и связаны супероператором канала \mathcal{N} , преобразующим матрицу плотности входа в матрицу плотности выхода: $\hat{\rho}_B = \mathcal{N}\hat{\rho}_A$ [24, 25]. Преобразование \mathcal{N} определяет поток квантово несовместимых состояний от входа канала к его выходу и является полностью квантовым аналогом классического условного распределения $p(y|x)$, которое осуществляет аналогичное линейное преобразование классического входного распределения вероятностей $p(x)$ в выходное распределение $p(y)$.
- *Совместимая информация* — вход и выход содержат внутренне несовместимые состояния, но взаимно совместимы. Результаты двух независимых измерений состояний входа x и выхода y дают классическую статистическую связь в форме совместного распределения вероятностей $p(x, y)$.

В то время как три первых типа информации хорошо известны в литературе [20, 22, 24], включая относительно недавно введённую меру когерентной информации, совместимая ин-

формация как особый тип информационной меры в явной форме введена лишь в самое последнее время [27]. Она определяется для составной двухчастичной системы с совместимыми входом и выходом, включающими внутреннюю квантовую несовместимость. Как показывается в работе [27], традиционное определение энтропии Шеннона и соответствующей информационной меры может быть с успехом использовано для анализа квантовых систем при условии корректного учёта фундаментальных различий между ансамблями классических и квантовых событий, несмотря на то, что изначально оно основано на рассмотрении классических случайных величин.

Совместимая информация учитывает как чисто классические, так и специфически квантовые корреляции состояний входа и выхода, проявляющиеся в форме статистической связи между классическими результатами двух независимых измерений, выполняемых на входе A и выходе B квантового канала. Она характеризует информационную связь между входом и выходом в форме, допускающей копирование, в отличие от когерентной информации, которая должна быть уничтожена в одной физической системе, чтобы быть переданной в другую. Обмен последней между двумя двухуровневыми атомами, обменивающимися резонансными фотонами в рамках модели Дике [28], был проанализирован в [29, 30], где, в частности, было показано, что ненулевое значение когерентной информации связано исключительно с ненулевым частотным расщеплением двухатомных состояний Дике, приводящим к осцилляционному обмену между одноатомными состояниями. В данной работе аналогичный анализ выполняется для совместимой информации.

Целью данной работы является дальнейшее теоретическое исследование свойств совместимой информации и применение развитых методов к информационному анализу конкретной физической системы, образованной двумя двухуровневыми атомами, взаимодействующими в соответствии с моделью Дике.

2 Общие свойства совместимой информации

2.1 Классическая информация Шеннона

Основой для введения совместимой информации является понятие шенноновского количества информации $I_{xy} = S_x - S_{x|y} = S_y - S_{y|x}$, являющейся взаимной информацией связи случайных величин x и y [20]. Её можно интерпретировать как информационную меру скорре-

лированности случайных величин x и y , или как количество информации об одной переменной (x), содержащейся в другой (y).

Для дискретной случайной величины x энтропия $S_x \equiv -\sum_x p_x \log_2 p_x$, где p_x есть вероятность x . Энтропия непрерывной случайной величины определяется как $S_x \equiv -\int_X p(x) \log_2 \frac{p(x)}{\nu_0(x)} dx$, где $p(x)$ — плотность распределения случайной величины x , $\nu_0(x)$ — вспомогательная плотность концентрации точек, в которых задана $p(x)$, не влияющая на величину информации связи и удовлетворяющая нормировке $\int_X \nu_0(x) dx = N$, где N — общее число точек, которое можно положить равным 1 [32].

Используя соотношение для условной энтропии $S_{x|y} = S_{xy} - S_y$, можем записать шенноновскую информацию в виде

$$I_{xy} \equiv S_x + S_y - S_{xy}, \quad (1)$$

откуда видна её симметричность относительно перестановки x и y местами. Минимальное значение информации связи равно нулю, что видно из определения информации в виде разности безусловной и условной энтропий, т.к. условная энтропия не превосходит безусловную. Максимальное значение информации равно 1, т.к. максимальное значение безусловной энтропии также равно 1.

Рассмотрим применение понятия шенноновского количества информации к классическому примеру. Пусть имеется система A в виде монеты, выпадающей с равной вероятностью на одну из двух сторон, и система B в виде игрока, угадывающего выпавшую сторону монеты с вероятностью q . Тогда совместная вероятность P_{ij} выпадения монеты на сторону i и ответа игрока j есть $P_{11} = P_{22} = \frac{q}{2}$, $P_{12} = P_{21} = \frac{1-q}{2}$. Количество информации связи ответов игрока и выпадения монеты, графически представленное на рис. 1, есть

$$I = S_A + S_B - S_{AB} = 1 + 1 + 2\left(\frac{q}{2} \log_2 \frac{q}{2} + \frac{1-q}{2} \log_2 \frac{1-q}{2}\right).$$

При $q = 0$ и $q = 1$ получаем $I = 1$ бит. Этот факт имеет простой наглядный смысл: если игрок всегда ($q = 1$) угадывает или никогда ($q = 0$) не угадывает (т.е. угадывает противоположный выпавшему варианту выпадение монеты, то система B 100% коррелирует с системой A , т.е. извлекает из нее максимально возможную информацию, равную одному биту. Если игрок угадывает выпадение монеты с вероятностью $q = 1/2$, то его показания статистически не связаны с выпадением монеты, т.е. системы A и B становятся статистически независимыми, что и приводит к нулевой информации связи ($I(q = 1/2) = 0$).

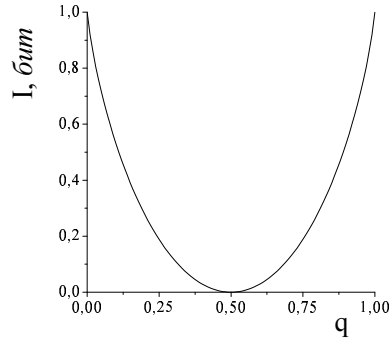


Рис. 1: Зависимость количества информации I связи ответов игрока и выпадений монеты от вероятности угадывания q .

Отметим следующее интересное соотношение, которое еще не раз будет появляться в дальнейшем: если усреднить $I(q)$ по q , то получим величину $\int_0^1 I(q) dq = I_D$,

$$I_D \equiv 1 - 1/\ln 4 \simeq 0.279. \quad (2)$$

Величина I_D соответствует среднему количеству информации связи без априорного знания вероятностей угадывания q , т.е. соответствует случаю, когда канал задан лишь статистически.

Подытоживая рассмотрение данного пункта еще раз отметим объекты и понятия, которыми мы здесь оперировали. Мы рассматривали две системы (монета A и игрок B), связанные некоторым абстрактным каналом связи, заданным условной вероятностью $p(j|i)$ (угадывание выпадений монеты игроком $p(1|1) = p(2|2) = q$, $p(1|2) = p(2|1) = 1 - q$). При таких условиях мы можем рассчитать совместную плотность распределения классических событий в этих системах (совместную вероятность $p(i, j)$ выпадения монеты i и ответа игрока j) и сопоставить ей классическую шенноновскую информацию связи.

Теперь перейдем к рассмотрению специфики квантового случая.

2.2 Информационная специфика квантовых событий

Рассмотрим простейшую двухуровневую квантовую систему A , или *кубит*, являющуюся квантовым аналогом классической системы с двумя элементарными событиями. Для обозначения волновых функций системы будем применять обозначения Дирака в виде бра- и кет-векторов. Ортогональные базисные состояния определяются как $|1\rangle = (1, 0)$ и $|2\rangle = (0, 1)$. Согласно принципу суперпозиции произвольное состояние $|\alpha\rangle$ кубита может быть представлено суммой этих двух базисных состояний, что может быть записано как поворот U одного

из базисных состояний в пространстве состояний кубита: $|\alpha\rangle = U|1\rangle = (\cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2})$, где матрица поворота

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\varphi} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Полярный $\theta \in (0, \pi)$ и азимутальный $\varphi \in (0, 2\pi)$ углы позволяют наглядно представить вектор состояния системы как вектор на сфере Блоха 2.

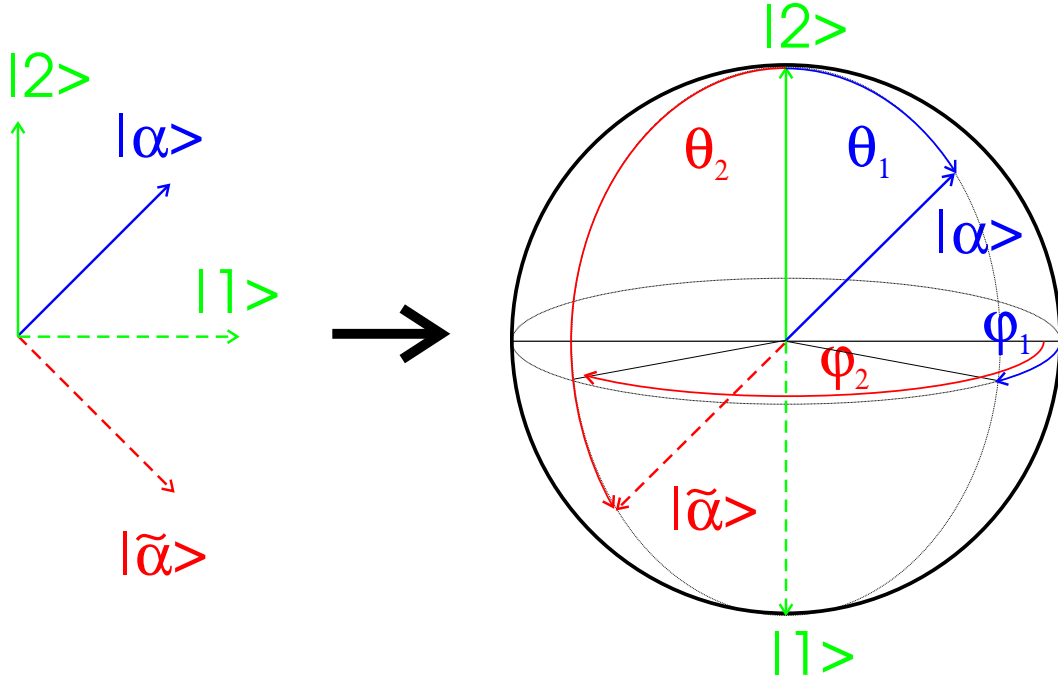


Рис. 2: Представление волновых функций двухуровневой квантовой системы векторами на сфере Блоха. Ортогональные волновые функции представляются центрально-симметричной парой векторов $|\alpha\rangle$ и $|\tilde{\alpha}\rangle$.

Ортогональный вектору $|\alpha\rangle$ вектор $|\tilde{\alpha}\rangle$ есть $|\tilde{\alpha}\rangle = U|2\rangle = (-e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})$, $\langle \alpha | \tilde{\alpha} \rangle = 0$. На сфере Блоха вектора $|\alpha\rangle$ и $|\tilde{\alpha}\rangle$ представляются центрально-симметричной парой векторов. Действительно, $|\tilde{\alpha}\rangle = (-e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) = -e^{i\varphi} (\cos \frac{\pi-\theta}{2}, e^{-i(\varphi+\pi)} \sin \frac{\pi-\theta}{2})$, что с точностью до фазового множителя $e^{-i\varphi}$ совпадает с $|\alpha\rangle$ с измененными углами $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, и соответствует отражению вектора $|\alpha\rangle$ относительно центра сферы Блоха.

Хорошо известно [16], что волновые функции играют роль элементарных событий в квантовом мире. Ключевым моментом квантовой теории информации, вытекающим из принципа суперпозиции, является наличие неортогональных состояний, или несовместимых квантовых событий, к которым неприменимы законы классической логики. Совместимыми событиями

ями, для которых мы можем применять развитую классическую теорию информации, являются только ортогональные пары волновых функций. Для того, чтобы выделить, или *селектировать*, такие состояния из всех физически возможных состояний системы, мы должны провести *прямое*, или ортогональное, измерение \hat{E}_α системы. Математическим выражением прямого измерения является разложение единичного оператора на ортопроекторы \hat{E}_β , где $\beta = \alpha, \tilde{\alpha} : \sum_{\beta} \hat{E}_\beta = \hat{E}_\alpha + \hat{E}_{\tilde{\alpha}} = |\alpha\rangle \langle \alpha| + |\tilde{\alpha}\rangle \langle \tilde{\alpha}| = |1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| = \hat{1}$. В результате такого измерения получаем вероятность $P(\alpha) = \langle \hat{E}_\alpha \rangle_A = \text{Tr} \hat{E}_\alpha \hat{\rho}_A$ обнаружения системы в состоянии $|\alpha\rangle$. Нетрудно видеть, что сумма этих вероятностей равна единице, что соответствует достоверному факту обнаружения системы в одном из ортогональных состояний: $P(\alpha) + P(\tilde{\alpha}) = \text{Tr} (\hat{E}_\alpha + \hat{E}_{\tilde{\alpha}}) \hat{\rho}_A = \text{Tr} \hat{1} \hat{\rho}_A = 1$.

В случае $|\alpha\rangle = |1\rangle$ ($|\tilde{\alpha}\rangle = |2\rangle$) вероятности P_1 и P_2 есть классические вероятности обнаружения системы в классических состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$.

2.3 Селектированная информация

Пусть имеются две квантовые двухуровневые системы A и B и совместная матрица плотности $\hat{\rho}_{AB}$ с матричными элементами ρ_{ijkl} , заданная в гильбертовом пространстве $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ состояний системы $A + B$. Проводя совместное измерение $\hat{E}_A(\alpha) \otimes \hat{E}_B(\beta)$ системы $A + B$ и усредняя его по состоянию системы, получаем совместное распределение

$$P(\alpha, \beta) = \text{Tr} (\hat{E}_A(\alpha) \otimes \hat{E}_B(\beta)) \hat{\rho}_{AB} = \sum_{i,j,k,l=1}^2 \rho_{ijkl} \langle \alpha | i \rangle \langle \beta | j \rangle (\langle \alpha | k \rangle \langle \beta | l \rangle)^*, \quad (3)$$

которое позволяет определить совместимую *селектированную* информацию

$$I_{\alpha\beta} = I[P(\alpha, \beta)] = S[P(\alpha)] + S[P(\beta)] - S[P(\alpha, \beta)] \quad (4)$$

аналогично классической информации Шеннона, с энтропией

$$S[P(\alpha)] = -P_\alpha \log_2 P_\alpha - P_{\tilde{\alpha}} \log_2 P_{\tilde{\alpha}}.$$

Такое определение позволяет рассматривать $I_{\alpha\beta}$ как информацию связи систем A и B посредством двух классических индексов α и β квантовых состояний $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$, или как информацию о состоянии $|\alpha\rangle$ системы A , содержащуюся в состоянии $|\beta\rangle$ системы B . Состояния $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ далее будем по отдельности называть *информационными состояниями*, а их в совокупности — *информационным базисом*. Таким образом в квантовом случае мы можем

узнать количество информации связи двух систем посредством любой пары информационных состояний, которые можно менять произвольным образом, задавая для каждой системы своё информационное состояние, в данном случае $|\alpha\rangle$ для A и $|\beta\rangle$ для B , в отличие от классического случая, где классические информационные состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ всегда одни и те же.

Рассмотрим применение понятия совместимой селектированной информации к системе из двух кубитов, находящейся в некоторых выделенных состояниях. Среди всех возможных двухчастичных матриц плотности $\hat{\rho}_{AB}$ выделим следующие важные частные случаи:

1) Состояние системы — чистое: $\hat{\rho}_{AB} = \Psi_{AB}\Psi_{AB}^+$. Два крайних случая Ψ_{AB} — независимое состояние $\Psi_{AB} = \Psi_A\Psi_B$ и максимально перепутанное состояние двух типов:

$$||\uparrow\uparrow \pm\rangle\rangle = (|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B)/\sqrt{2} \quad (5)$$

$$||\uparrow\downarrow \pm\rangle\rangle = (|0\rangle_A |1\rangle_B \pm |1\rangle_A |0\rangle_B)/\sqrt{2}. \quad (6)$$

2) Состояние системы — классическая смесь:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\uparrow+} &= (|0\rangle_A |0\rangle_B \langle 0|_B \langle 0|_A + |1\rangle_A |1\rangle_B \langle 1|_B \langle 1|_A)/2 \\ \hat{\rho}_{\uparrow-} &= (|0\rangle_A |1\rangle_B \langle 1|_B \langle 0|_A + |1\rangle_A |0\rangle_B \langle 0|_B \langle 1|_A)/2. \end{aligned} \quad (7)$$

В таком состоянии система описывает состояние классического бита и совместимая информация отражает чисто классические корреляции, связывающие индексы состояний двух подсистем.

Далее будем говорить о системе, находящейся в выделенных выше состояниях, как о различных системах, находящихся в этих состояниях. Для независимого состояния вида $\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A\hat{\rho}_B$ имеем $S_{AB} = S_A + S_B$ и $I = 0$, т.е. оно не несет никакой информации связи и дальше мы его рассматривать не будем.

Матричные элементы $P(\alpha, \beta)$ для рассмотренных выше состояний (5), (6) и (7) в произвольном информационном базисе согласно (3) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{\uparrow\uparrow\pm}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2}(\cos^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2} + \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \pm \frac{1}{2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ P_{\uparrow\pm}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4}(1 \pm \cos \theta_1 \cos \theta_2) \\ P_{\uparrow\downarrow\pm}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4}(1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (8)$$

Легко видеть, что для всех этих систем $P(\alpha) = P(\beta) = 1/2$, что приводит к $S_A = S_B = 1$ при любом выборе α и β .

Для начала рассмотрим классические корреляции в этих системах, т.е. возьмем классический информационный базис $|\alpha\rangle = |\beta\rangle = |1\rangle$. При таком выборе системы коррелируют только посредством индексов ортогональных классических событий $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Нетрудно видеть, что для всех рассматриваемых нами систем в данном информационном базисе $S_{AB} = 1$, $I = 1 + 1 - 1 = 1$ бит, т.е. эти системы в классическом понимании жестко скоррелированы, и знание о классическом состоянии одной системы дает достоверное знание о состоянии другой.

Далее рассмотрим произвольный информационный базис. Пространство состояний двух кубитов четырехмерно, что не позволяет показать зависимость $I_{\alpha\beta}$ в удобном для восприятия виде. Поэтому следует сократить число степеней свободы $I_{\alpha\beta}$ как минимум до двух. Для этого возьмем, к примеру, одинаковые информационные состояния для обеих систем. Двумерное пространство состояний одной системы, представленное сферой Блоха, позволяет визуализировать зависимость информации в данном случае от двух углов (θ и φ), задающих вектор общего информационного состояния. Зависимость селектированной совместимой информации $I_{\alpha=\beta}$ от этих углов для систем (5), (6) и (7) показана на рис. 3.

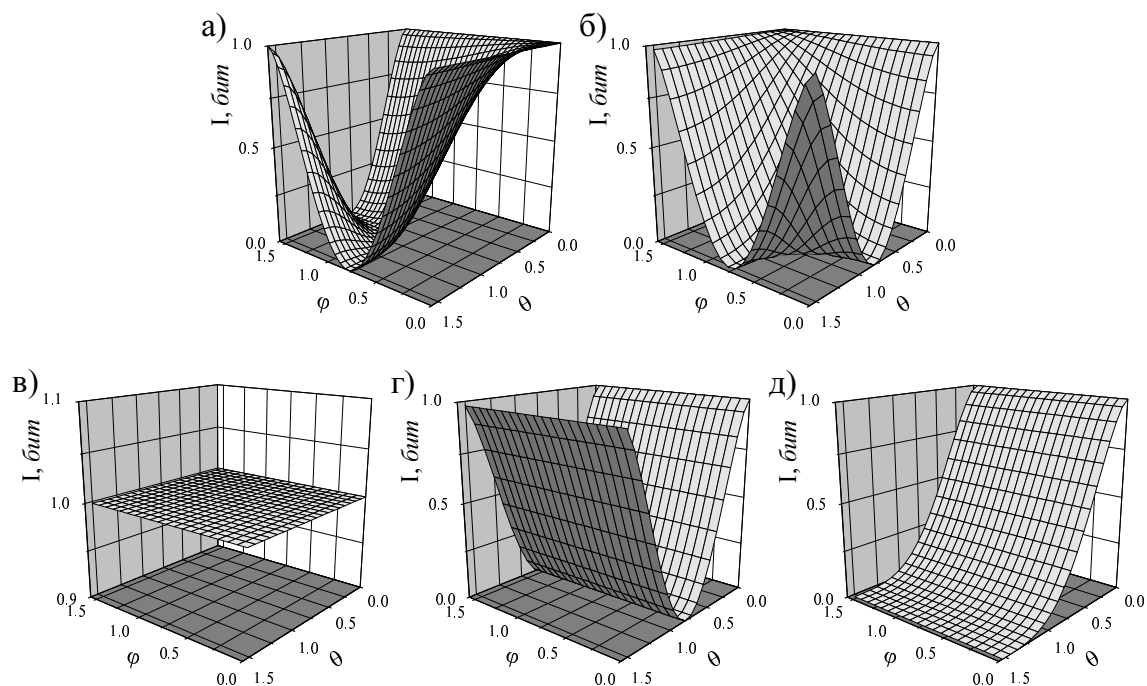


Рис. 3: Зависимость селектированной информации $I_{\alpha=\beta}$ от общего информационного состояния $|\alpha\rangle$, заданного двумя углами θ и φ на сфере Блоха, для белловских состояний (три триплетных: а) $|\uparrow\uparrow\uparrow + \rangle\rangle$, б) $|\uparrow\uparrow\uparrow - \rangle\rangle$, г) $|\uparrow\uparrow\downarrow + \rangle\rangle$ и одно синглетное в) $|\uparrow\uparrow\downarrow - \rangle\rangle$) и классически коррелированного состояния д) $\hat{\rho}_{\uparrow}$.

Как частный случай информационного базиса $|\alpha\rangle = |\beta\rangle = |1\rangle$ здесь виден и результат предыдущего выбора информационных состояний вида $|1\rangle, |2\rangle$, который представлен здесь при $\theta = \varphi = 0$ и информация $I = 1$.

Среди четырех белловских состояний (5), (6) сразу выделяется синглетное антисимметрическое состояние, которое инвариантно относительно вращений общего для двух подсистем A и B трехмерного пространства, которое отображается вращением информационного базиса $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ в пространстве состояний системы $A+B$. Эта инвариантность приводит к независимости информации от углов θ и φ . При любом выборе информационного состояния информация связи подсистем в антисимметрической системе равна 1, а при другом выборе информационного базиса, когда информационные состояния систем не равны друг другу, информация для синглетного состояния будет зависеть только от разности углов между этими состояниями.

Для триплетных белловских состояний информация зависит в общем случае от обоих углов θ и φ . Для триплетного состояния (5) зависимость $P(\alpha, \beta)$ включает в себя зависимость от углов φ_1 и φ_2 в виде $\varphi_1 - \varphi_2$, что и обуславливает отсутствие зависимости информации от азимутального угла, т.к. выбраны одинаковые информационные состояния для обеих систем, и $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$.

Для состояния (7) зависимость от азимутального угла φ отсутствует принципиально уже на уровне совместной плотности распределения.

При $\theta = \pi/2$ информационный базис повернут так, что на сфере Блоха он перпендикулярен базису $|1\rangle, |2\rangle$. В результате для классически коррелированного состояния (7) информация равна нулю, для состояний (6) равна 1, а для состояний (5) зависит от азимутального угла и периодически с периодом π по обоим углам меняется от 0 до 1. Рассматривая один период изменения информации отметим, что вторая часть периода является зеркальным отражением первого, т.е. $I(\theta, \varphi) = I(\pi - \theta, \pi - \varphi)$, поэтому на рис.3 углы θ и φ меняются в диапазоне от 0 до $\pi/2$.

Рассмотрим следующий тип информационного базиса, когда информационное состояние первой системы зафиксировано, например $|\alpha\rangle = |1\rangle$, а второе произвольно меняется. В данном случае зависимости от азимутального угла нет, что обусловлено выбором $|\alpha\rangle = |1\rangle$, и для всех рассматриваемых выше состояний зависимость информации

$$I_{\alpha=1,\beta} = \frac{1}{\ln 4} ((1 + \cos \theta) \ln(1 + \cos \theta) + (1 - \cos \theta) \ln(1 - \cos \theta))$$

от полярного угла θ информационного состояния $|\beta\rangle$, показанная на рис. 4, одна и та же.

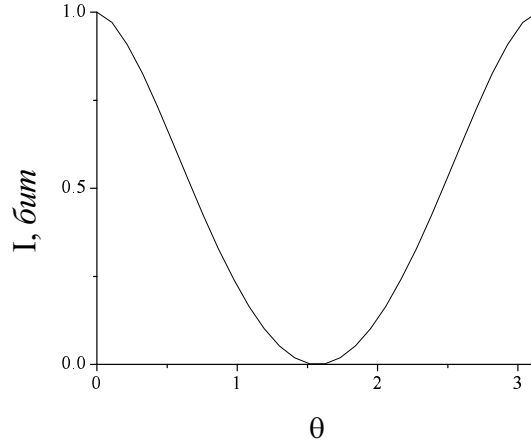


Рис. 4: Зависимость селектированной информации $I_{\alpha=1,\beta}$ от угла θ вектора $|\alpha\rangle$.

Следует отметить интересное аналитическое соотношение для $I_{\alpha=1,\beta}(\theta)$ применительно к рассматриваемым выше состояниям:

$$\int_0^\pi I_{\alpha=1,\beta}(\theta) \frac{\sin \theta}{2} d\theta = I_D,$$

где I_D совпадает с (2) и равно $I_D = 1 - 1/\ln 4 \simeq 0.279$. Здесь мы видим прямую аналогию между классической информацией Шеннона и квантовой совместимой селектированной информацией: усреднению по информационному состоянию одной из подсистем соответствует усреднение по классическому каналу (по вероятностям угадывания в примере пункта 2.1).

При другом выборе первого информационного состояния $|\alpha\rangle$ в общем случае появляется зависимость I от обоих углов θ и φ состояния $|\beta\rangle$. Рассмотрим усредненную по $|\beta\rangle$ информацию $\langle I \rangle_\beta$ как функцию $|\alpha\rangle$:

$$I_\alpha = \langle I_{\alpha,\beta} \rangle_\beta = \int I_{\alpha,\beta} dV_\beta. \quad (9)$$

Такой тип усреднения дает для полностью перепутанных состояний (5),(6) постоянную величину I_D , а для (7) есть зависимость от θ , совпадающая с зависимостью $I_{\alpha=1,\beta}(\theta)$, показанной на рис. 4

Особенностью селектированной информации, как уже отмечалось выше, является ее зависимость от конкретного выбора информационных состояний для обеих подсистем A и B . В общем случае, при рассмотрении произвольных квантовых систем, это является недостатком, т.к. такая информация учитывает скоррелированность только по некоторым выделенным состояниям, а в квантовом случае, если нет априорно выделенных состояний, все состояния должны быть равноправно представлены. Поэтому необходимо рассмотреть операционно—

инвариантную информационную характеристику [31], т.е. равноправно учитывающую все квантовые состояния системы. Такому требованию отвечает усредненная по информационному базису селектированная информация. При усреднении мы можем использовать одни и те же информационные состояния для обеих систем, либо для каждой системы — свои, с усреднением по обеим системам. Так получаются две операционно-инвариантные характеристики на основе селектированной информации:

$$\langle I \rangle_{\alpha=\beta} = \int I_{\alpha,\beta=\alpha} dV_{\alpha} \quad (10)$$

$$\langle I \rangle_{\alpha,\beta} = \int I_{\alpha,\beta} dV_{\alpha} dV_{\beta} \quad (11)$$

В первом случае получается некоторый переходный между селектированной и неселектированной информацией вариант $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$, когда, с одной стороны, нет априорно выделенных состояний, с другой — для обеих систем используются одинаковые измерения, что означает наличие дополнительных априорных условий. Во втором случае получаем величину $\langle I \rangle_{\alpha,\beta}$ аналитически совпадающую с неселектированной информацией I_{us} , которая будет рассмотрена в следующем пункте, т.к. имеет важный качественный смысл.

Исследуем свойства $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ и $\langle I \rangle_{\alpha,\beta}$ на примере систем (5),(6) и (7).

Рассмотрим квазиклассическое состояние (7), для которого, согласно (8), нет зависимости от φ . Рассчитывая информацию (4), после упрощений, имеем:

$$I(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\ln 4} \sum_{i=1}^2 (1 + (-1)^i \cos \theta_1 \cos \theta_2) \ln(1 + (-1)^i \cos \theta_1 \cos \theta_2).$$

Зависимость $I(\theta_1, \theta_2)$, симметричная относительно перестановки $\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$, показана на рис. 5.

Следует обратить внимание на то, что информация, в основном, сконцентрирована в области малых углов θ_1 и θ_2 . При $\theta_1 = \theta_2 = 0$ имеем $I = 1$, что отражает 100% классическую корреляцию в данной системе. Рассчитывая усредненную информацию по формулам (10) и (11) получаем:

$$\langle I \rangle_{\alpha,\beta} = \int_0^{\pi} I(\theta_1, \theta_2) \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{4} d\theta_1 d\theta_2 = I_{D1} \equiv 1 - (20 - \pi^2)/(16 \ln 2) \simeq 0.087 \quad (12)$$

$$\langle I \rangle_{\alpha=\beta} = \int_0^{\pi} I(\theta_1, \theta_2 = \theta_1) \frac{\sin \theta_1}{2} d\theta_1 = I_{D2} \equiv 4/3 - (8 - \pi)/(6 \ln 2) \simeq 0.165 \quad (13)$$

Общая идея взятия таких интегралов следующая: делаем замену переменной интегрирования — $\sin \theta d\theta = d \cos \theta$ и все подынтегральные функции приводим к виду $F(\cos \theta)$. Для состояний (5),(6) выкладки несколько сложнее ввиду громоздкости выражений для $I(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$, и

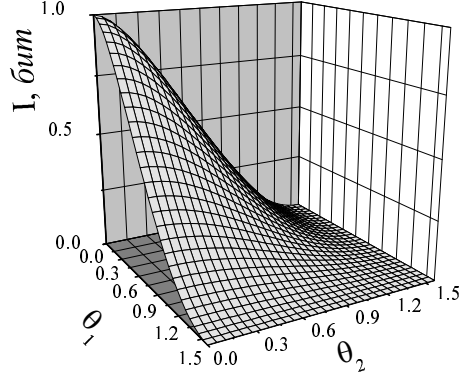


Рис. 5: Зависимость селектированной информации I от полярных углов θ_1 и θ_2 для классически коррелированного состояния $\hat{\rho}_{\uparrow}$.

взятие соответствующих интегралов представляет непростую задачу, поэтому далее приведем лишь итоговый результат.

Для всех четырех состояний Бэлла:

$$\langle I \rangle_{\alpha,\beta} = I_{\alpha=1, \langle \beta \rangle} = I_D \equiv 1 - 1/\ln 4 \simeq 0.279. \quad (14)$$

Для синглетного состояния $|\uparrow\downarrow - \rangle\rangle$ получаем $\langle I \rangle_{\alpha=\beta} = 1$, а для триплетных

$$\langle I \rangle_{\alpha=\beta} = I_{D3} \equiv 7/3 - 4/\ln 8 \simeq 0.41. \quad (15)$$

Для полноты анализа рассмотрим переходные от чистых (5), (6) к смешанным (7) состояниям:

$$\hat{\rho}_s = q |\uparrow\downarrow - \rangle\rangle \langle\langle \uparrow\downarrow - | + (1-q)\hat{\rho}_{\uparrow-}; \quad (16)$$

$$\hat{\rho}_s = q |\uparrow\downarrow + \rangle\rangle \langle\langle \uparrow\downarrow + | + (1-q)\hat{\rho}_{\uparrow-}; \quad (17)$$

$$\hat{\rho}_s = q |\uparrow\uparrow \rangle\rangle \langle\langle \uparrow\uparrow | + (1-q)\hat{\rho}_{\uparrow+}. \quad (18)$$

На рис. 6 приведена зависимость двух случаев усредненной селектированной информации $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ и $\langle I \rangle_{\alpha,\beta}$ от относительного веса q чистых перепутанных состояний $|\uparrow\uparrow \rangle\rangle, |\uparrow\downarrow \rangle\rangle$ в смеси с классическим смешанными состояниями $\hat{\rho}_{\uparrow+}, \hat{\rho}_{\uparrow-}$.

Зависимость средней информации $\langle I \rangle_{\alpha,\beta}$ от q для всех трех состояний (16),(17) и (18) одинакова и показана сплошной линией. Информация $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ таким свойством не обладает, поэтому для каждого состояния (16),(17),(18) показана своя зависимость.

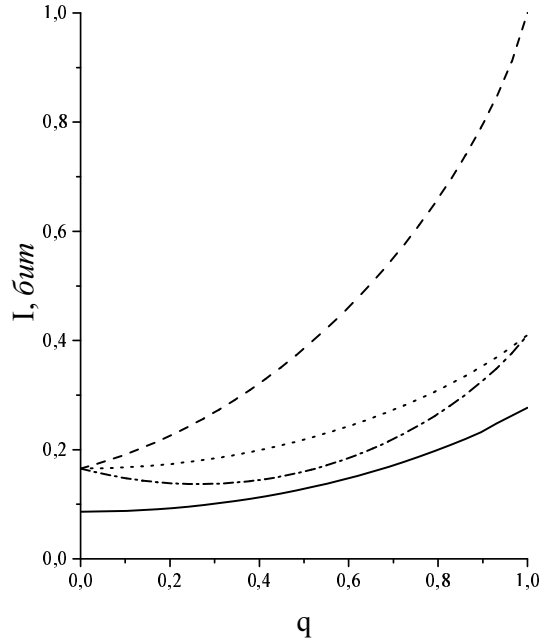


Рис. 6: Зависимость усредненной селектированной информации от параметра перепутанности q . При $q = 0$ состояние полностью смешанное при $q = 1$ — чистое перепутанное. Сплошной линией показана зависимость $\langle I \rangle_{\alpha,\beta}$. Штриховой — $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ для синглетного состояния, штрих-пунктирной — $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ для триплетного симметричного состояния и пунктирной — $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ для остальных двух триплетных состояний Бэлла.

Максимального значения все информационные характеристики достигают для чистых полностью перепутанных состояний. Состояния $|\uparrow\uparrow \pm\rangle$ переходят друг в друга при преобразовании $\varphi + \varphi_1 \rightarrow \varphi + \varphi_1 + \pi$ поэтому они неразличимы с помощью этих характеристик, т.к. при вычислении средних такие слагаемые в равной степени появляются у обоих состояний. Синглетное $|\uparrow\downarrow -\rangle$ и триплетное $|\uparrow\downarrow +\rangle$ состояния таким свойством не обладают, поэтому зависимость $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ для них разная.

2.4 Неселектированная информация

При рассмотрении селектированной информации для определения совместного распределения событий в двух подсистемах A и B , которые можно рассматривать как вход и выход некоторого абстрактного канала связи, мы использовали прямое квантовое измерение состояний подсистем, которое математически представляется ортогональным разложением единичного оператора. Однако в общем случае любое измерение системы представляется положительно

определенной операторной мерой (ПОМ), являющейся разложением единичного оператора. Рассмотрим *обобщенное* квантовое измерение, т.е. измерение сразу всех квантовых состояний системы, которое может быть реализовано как прямое измерение ортогональных состояний в соответствующей расширенной системе [33].

В соответствии с [34] обобщенное квантовое измерение математически представляется специальным выбором ПОМ в виде неортогонального разложения единицы: $\hat{E}(d\nu) = |\nu\rangle \langle \nu| dV_\nu$, где dV_ν есть дифференциал объема D -мерного гильбертова пространства H_A физически различных состояний $|\nu\rangle$ системы A , удовлетворяющий нормировке $\int dV_\nu = D$. В нашем случае для двухуровневой системы пространство состояний представляется двумерной сферой Блоха, $D = 2$, $dV_\nu = \sin(\theta)d\theta d\varphi/(2\pi)$. Нетрудно видеть, что такая мера действительно нормирована на единицу: $\int \hat{E}(d\nu) = \hat{1}$.

С использованием на входе и выходе абстрактного квантового канала, заданного матрицей плотности $\hat{\rho}_{AB}$, обобщенного совместного измерения в виде тензорного произведения двух независимых ПОМ $\hat{E}_A(d\nu) \otimes \hat{E}_B(d\mu)$ получаем совместное распределение вероятностей [35]:

$$P(d\nu, d\mu) = Tr[\hat{E}_A(d\nu) \otimes \hat{E}_B(d\mu)]\hat{\rho}_{AB}, \quad (19)$$

которое показывает скоррелированность двух систем A и B , рассматриваемых здесь как вход и выход некоторого абстрактного квантового канала, равноправно учитывающую *все*, а не только ортогональные квантовые состояния. Такому распределению соответствует *неселектированная* информация, задающая объём классической информации Шеннона прямо между всеми квантовыми состояниями входа и выхода с учётом их внутренней квантовой неопределённости:

$$I_{us} = I[P(d\nu, d\mu)] = S[P(d\nu)] + S[P(d\mu)] - S[P(d\nu, d\mu)]. \quad (20)$$

Энтропия в данном случае определяется как $S[P(d\nu)] = - \int P(d\nu) \log_2 \frac{P(d\nu)}{dV_\nu}$.

Неселектированная информация в наиболее общем виде отражает динамику обмена информацией между входом и выходом квантового канала, где нет априорно выделенных состояний, т.к. какая-либо селекция квантовых состояний отсутствует. Как уже отмечалось в пункте 2.3, неселектированная информация аналитически совпадает с усредненной селектированной информацией $\langle I \rangle_{\alpha, \beta}$. Этот факт позволяет сказать, что неселектированная информация отражает не только квантовую неопределенность состояний самой системы в форме статистической неопределенности классических индексов квантовых состояний, но и проис-

текающую отсюда неопределенность соотношений между квантовыми состояниями различных систем.

Максимально возможного значения $I_D \simeq 0.279$ неселектированная информация достигает для максимально перепутанных состояний (5), (6). Такое значение согласно [27] соответствует объему *доступной* информации, т.е. различимой информации, содержащейся во всех квантовых состояниях входа, для которой аналитическое выражение $I_D = 1 - 1/\ln 4$ впервые было рассчитано в работе [36].

Неселектированная информация для смешанного состояния (7) согласно (12) равна $I_{D1} = 1 - (20 - \pi^2)/(16 \ln 2) \simeq 0.087$. Этот удивительный факт столь малого количества информации для системы, отражающей состояние классического бита, объясняется тем, что используется неселективное измерение, равноправно учитывающее все квантовые состояния системы, а классические состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$, на которых и построена корреляция классического бита, — это всего лишь одни из них. При учете скоррелированности сразу всех состояний одной системы со всеми состояниями другой получаем однородно распределенную по всем квантовым состояниям псевдоклассическую информацию, которая равна столь малой величине.

Здесь мы видим существенную разницу между классическими и квантовыми состояниями, которые при выборе классического информационного состояния $|1\rangle$ дают одно и то же количество селектированной информации $I = 1$, т.е. классически они не различимы и одинаково жестко скоррелированы, но при выборе другой информационной характеристики, будь то усредненная селектированная информация $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ или неселектированная информация I_{us} величины информации для них отличаются в несколько раз, причем для квантово коррелированных состояний информация больше, чем для классических.

Анализ зависимости количества совместимой информации от степени перепутанности для чистых и смешанных ансамблей при выборе измерения, скомбинированного из селективного и неселективного, приведен в работах [27, 35]. Результаты расчетов неселектированной информации показывают, что она меняется в пределах от 0 для независимых подсистем до максимального значения $\simeq 0.279$ для полностью перепутанных подсистем. Селектированная совместимая информация меняется в пределах от 0 до 1.

3 Информационный анализ задачи Дике

В предыдущем пункте мы рассмотрели различные свойства информационных характеристик на примере некоторых важных стационарных состояний. Интересно применить развитые выше методы для динамически меняющихся состояний. Простым, но нетривиальным, примером таких состояний может служить состояние системы из двух двухуровневых атомов в приближении задачи Дике.

3.1 Задача Дике

Рассмотрим динамику системы из двух идентичных двухуровневых атомов A и B , находящихся на близком расстоянии друг от друга, на масштабах времени, превосходящих время межатомного запаздывания излучения. Решение этой задачи дается в терминах двух распадающихся со временем состояний Дике, являющихся максимально перепутанными, — симметричного $||s\rangle\rangle = (|1\rangle_A |2\rangle_B + |2\rangle_A |1\rangle_B)/\sqrt{2}$ и антисимметричного $||a\rangle\rangle = (|1\rangle_A |2\rangle_B - |2\rangle_A |1\rangle_B)/\sqrt{2}$, двухфотонного верхнего состояния $||2\rangle\rangle = |2\rangle_A |2\rangle_B$ и стабильного вакуумного состояния $||v\rangle\rangle = |1\rangle_A |1\rangle_B$. Для произвольного чистого начального состояния системы вида $\Psi_{AB}(0) = \Psi_A \otimes \Psi_B$ имеем [30]:

$$\Psi_{AB}(t) = c_s(t) ||s\rangle\rangle + c_a(t) ||a\rangle\rangle + c_2(t) ||2\rangle\rangle + c_v(t) ||v\rangle\rangle, \quad (21)$$

где $c_s(t), c_a(t), c_2(t), c_v(t)$ — комплексные амплитуды соответствующих состояний ($c_s(t)$ — амплитуда состояния $||s\rangle\rangle$, $c_a(t)$ — $||a\rangle\rangle$, $c_2(t)$ — $||2\rangle\rangle$, $c_v(t)$ — $||v\rangle\rangle$):

$$c_s(t) = c_s(0)e^{-(\gamma_s/2+i\Lambda)t}, \quad (22)$$

$$c_a(t) = c_a(0)e^{-(\gamma_a/2-i\Lambda)t}, \quad (23)$$

$$c_2(t) = c_2(0)e^{-2\gamma t}, \quad (24)$$

$$c_v(t) = c_v(0) + \sqrt{c_s^2(0) + c_a^2(0) + c_2^2(0) - c_s^2(t) - c_a^2(t) - c_2^2(t)}e^{i\xi(t)}. \quad (25)$$

Комплексная амплитуда $c_v(t)$ вакуумной компоненты $||v\rangle\rangle$ включает некогерентную добавку $e^{i\xi(t)}$, обусловленную спонтанными радиационными переходами с возбужденных атомных состояний, где $\xi(t)$ — равномерно распределенная фаза атомных колебаний.

Ограничимся лишь случаем двух идентичных атомов с параллельными дипольными моментами, направленными перпендикулярно вектору, соединяющему рассматриваемые атомы.

В этом случае существенны только два безразмерных параметра: время γt , где γ описывает скорость радиационного распада изолированного атома, и межатомное расстояние $\varphi = k_0 R$, где R — расстояние между атомами и k_0 — модуль волнового вектора, соответствующего частоте перехода изолированного атома. Безразмерные двухатомные скорости радиационного распада $\gamma_{s,a}$ и частотного сдвига Λ за счет короткодействующего диполь–дипольного взаимодействия описываются следующими соотношениями:

$$\frac{\gamma_{s,a}}{\gamma} = 1 \pm g, \quad \frac{\Lambda}{\gamma} = \frac{3}{4\varphi^3}, \quad g = \frac{3}{2} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} + \frac{\cos \varphi}{\varphi^2} - \frac{\sin \varphi}{\varphi^3} \right). \quad (26)$$

Из соотношений (26) следует, что на расстоянии менее длины волны зависимость g от φ слабая, и $g \approx 1$. При $\varphi \rightarrow 0$ получаем $\gamma_a \rightarrow 0$, что обеспечивает долгое время жизни антисимметричной компоненты Дике $||a\rangle\rangle$. Симметричная компонента $||s\rangle\rangle$ быстро распадается, поэтому в области малых φ при больших временах основную роль играет $||a\rangle\rangle$.

Матрица плотности $\hat{\rho}_{AB}$ квантового канала связи, реализуемого двумя атомами, получается усреднением по флуктуациям фазы чистого двухатомного состояния, представленным переменной $\xi(t)$. Если состояние системы изначально представляет собой некогерентную смесь, то следует также провести усреднение по когерентным составляющим этой смеси.

3.2 Результаты расчетов информации и их обсуждение

Рассмотрим информационные аспекты динамики атомов в задаче Дике. Рассчитаем следующие информационные характеристики на основе селектированной информации:

- селектированная информация (4) I_{11} с информационным базисом $|\alpha\rangle = |\beta\rangle = |1\rangle$, равная классической шенноновской информации;
- усредненная селектированная информация (10) $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$;
- усредненная по второму информационному состоянию $|\beta\rangle$ при фиксированном первом информационном состоянии $|\alpha\rangle = |1\rangle$ информация (9) $\langle I \rangle_{\alpha=1,\beta}$;
- неселектированная информация (20) I_{us} .

Распределение $P(\alpha, \beta)$ задаётся выражением (3) с $\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_{AB}[\gamma t, \varphi, \hat{\rho}_A(0), \hat{\rho}_B(0)]$.

Проанализируем зависимости четырех описанных выше типов информации I от безразмерных времени γt и расстояния φ , а также от начальных условий $\hat{\rho}_A(0), \hat{\rho}_B(0)$.

Зависимости I от γt и φ , полученные при различных начальных состояниях первого атома и основном начальном состоянии второго, идентичны на качественном уровне, но отличаются абсолютными величинами информации. Поэтому ограничимся рассмотрением зависимости лишь для случая чистого начального состояния $|2\rangle$ первого атома и состояния $|1\rangle$ для второго.

Результаты расчетов представлены на рис. 8. Для сравнения на рис. 7 приведены аналогичные зависимости для разностей населенностей n_A и n_B двух атомов и для произведения населенностей $n_{A2}n_{B2}$ верхних уровней этих атомов.

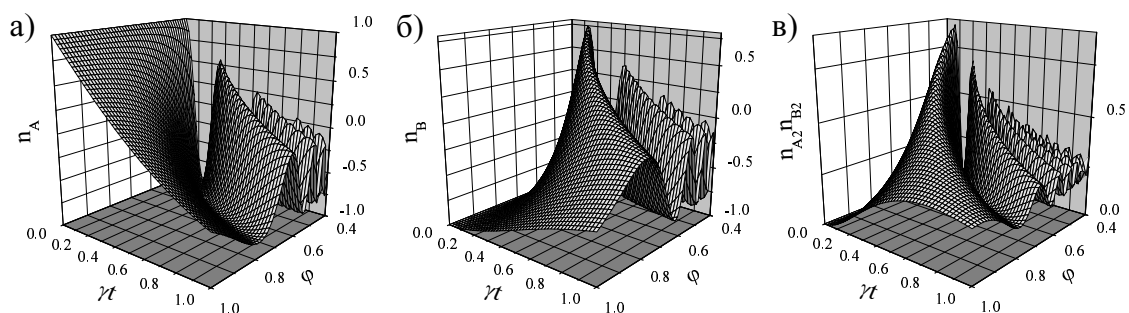


Рис. 7: Зависимость: а) разности населенностей n_A первого атома, б) разности населенностей n_B второго атома и в) произведения $n_{A2}n_{B2}$ населенностей верхних уровней обоих атомов от безразмерных времени γt и расстояния φ . Первый атом в начальный момент времени находится полностью в верхнем состоянии $|2\rangle$, а второй — в нижнем $|1\rangle$.

Видно, что зависимости $n_{A2}n_{B2}$ и I от γt и φ носят похожий друг на друга осцилляционный характер, обусловленный короткодействующим диполь–дипольным взаимодействием. Характер изменения информации и ее максимальная и минимальная величины проявляются в области изменения параметров $0 < \gamma t < 1$, $10^{-3} < \varphi < 1$. При $\varphi \rightarrow 0$ наблюдается характерное увеличение частоты осцилляций. При построении графиков использовалась дискретная сетка по γt и φ , поэтому при малых φ возникают сильные искажения гладкости зависимостей, которые мы устранили, поставив диапазон изменения $0.4 < \varphi < 1$.

При $\gamma t = 0$ имеем $I = 0$, т. к. атомы приготовлены независимыми. С течением времени, информация осцилляционно возрастает до некоторого максимального значения, зависящего от начального состояния первого атома, а затем, также осциллируя, убывает до нуля. Чем меньше расстояние между атомами, тем большее значение информации может быть достигнуто с течением времени, и тем дольше она будет убывать.

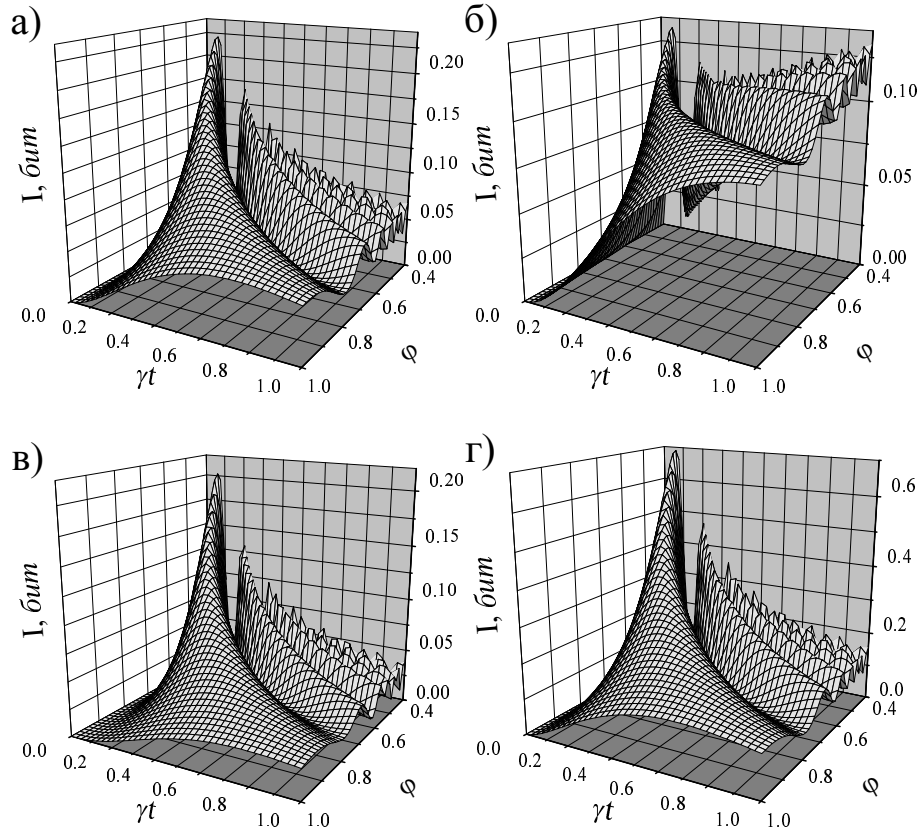


Рис. 8: Зависимость информации а) I_{us} , б) $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ в) $\langle I \rangle_{\alpha=1,\beta}$ и г) I_{11} от безразмерных времени γt и расстояния φ . Первый атом в начальный момент времени находится полностью в верхнем состоянии $|2\rangle$, а второй — в нижнем $|1\rangle$.

Зависимости I_{us} , $\langle I \rangle_{\alpha=1,\beta}$ и I_{11} , показанные соответственно на рис. 8 а), в) и г) имеют похожий друг на друга вид и отличаются максимально достигаемыми величинами. Максимальное значение неселектированной информации I_{us} и частично усредненной информации $\langle I \rangle_{\alpha=1,\beta}$ асимптотически достигается в области малого времени и расстояния на первом периоде колебаний по времени и соответствует величине $I_D \simeq 0.279$ неселектированной информации для полностью перепутанных подсистем. На малых расстояниях информация очень долго остается ненулевой (при $\varphi \rightarrow 0$ и больших γt получаем $I_{us} \simeq 0.05317$), что обусловлено долгоживущей компонентой Дике. Зависимость I_{11} имеет такие же качественные особенности, но в максимуме достигает величины 1 бит.

Некоторые качественные отличия от описанных выше зависимостей имеет $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$. Как мы видели на рис. 3, $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ для чистого синглетного белловского состояния равно 1 бит, сильно превышая величины $\simeq 0.41$ для триплетных состояний. В рассматриваемой здесь задаче Дике

триплетное симметричное состояние $||s\rangle\rangle$ быстро распадается, а синглетное антисимметричное состояние $||a\rangle\rangle$, наоборот, является долгоживущим. Поэтому при распаде $||s\rangle\rangle$ информация $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ не только не уменьшается, но даже немного увеличивается, т.к. увеличивается относительный вклад антисимметричного состояния $||a\rangle\rangle$. С распадом долгоживущего состояния $||a\rangle\rangle$ информация убывает до нуля.

Такая зависимость отражает физическую картину процесса излучения одного атома в присутствии другого. При малых межатомных расстояниях для долгоживущей компоненты фотон долго не может уйти из атомной системы, переходя от одного атома к другому, создавая перепутанное состояние системы. Поэтому информация быстро достигает величины, близкой к максимально возможной, соответствующей максимально перепутанным состояниям. Понятно, что степень перепутанности будет зависеть от того, насколько успел излучиться фотон до начала рассмотрения процесса. Чем больше населенность верхнего уровня первого атома в начальный момент времени, тем более связанными могут стать атомы, и тем большая может получиться величина совместимой информации. Однако, со временем, фотон все-таки излучается в вакуум, и атомы переходят в основное состояние, становясь при этом независимыми. Поэтому информация асимптотически стремится к нулю при $\gamma t \rightarrow 0$.

Заметим, сравнивая этот результат с [30], что в отношении к этому пределу поведение совместимой и когерентной информации идентичны. Однако, когерентная информация присутствует лишь на временах существования обеих компонент Дике, в то время как совместимая существует столько времени, сколько существует долгоживущая компонента.

В дополнение к рассмотренной выше зависимости интересно рассмотреть также случай, когда начальное состояние первого атома выбрано в виде некогерентной смеси при той же разности населенностей, что и для чистого состояния. Зависимость неселектированной информации I от начальной разности населенностей $n = n_2 - n_1$ первого атома для случая смешанного и чистого его начального состояния при фиксированных значениях времени и расстояния ($\gamma t = 0.2, \varphi = 0.4$) приведена на рис. 9. Видно, что в случае смешанного начального состояния информация немного меньше, чем в случае чистого при той же разности населенностей. Однако на характер зависимости I от γt и φ эта разница не влияет.

При рассмотрении возбуждённых начальных состояний обоих атомов основной интерес представляет зависимость информации от начального состояния атомов при фиксированном времени и расстоянии, т.к. характер пространственно-временной зависимости уже известен.

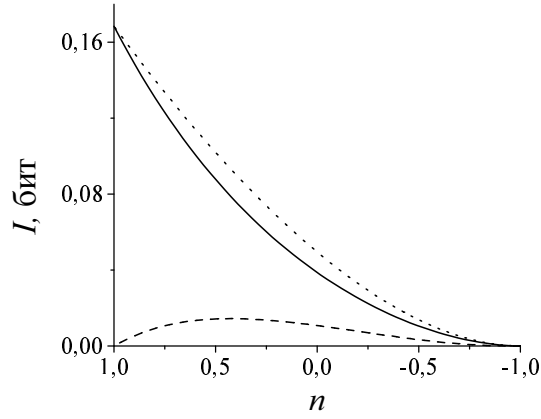


Рис. 9: Зависимость неселектированной совместимой информации I от разности населенностей n первого атома для $\gamma t = 0.2, \varphi = 0.4$. Сплошная линия — начальное состояние первого атома выбрано в виде равновероятной некогерентной смеси верхнего и нижнего уровней; пунктирная — в виде чистого равновероятного суперпозиционного состояния; штриховая — разность этих зависимостей.

Рассматривался случай начально независимых атомов, приготовленных в чистом состоянии $\Psi_{AB}(0) = \Psi_A \otimes \Psi_B$. Согласно (21), состояние системы $\Psi_{AB}(t)$ и соответствующая ему совместимая информация в этом случае зависят от двух параметров — разностей населённости n_A и n_B индивидуальных состояний атомов.

Результаты расчетов приведены на рис. 10 и 11. На рис. 10а и рис. 11а представлена неселектированная информация I_{us} , на рис. 10б и рис. 11б — предельно селектированная информация I_{11} , на рис. 10в и рис. 11в — усредненная информация $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ и на рис. 10г и рис. 11г — частично усредненная информация $\langle I \rangle_{\alpha=1,\beta}$.

Все зависимости симметричны относительно перестановки атомов местами, т.е. все графики на рис. 10 и 11 имеют плоскость симметрии. Минимальное значение, равное нулю, информация имеет лишь для вакуумного состояния атомной системы и представлена на графиках при $n_A = n_B = -1$, когда отсутствует какое-либо возбуждение системы. В центре графика зависимость в общем случае немонотонна. Максимальные значения информации достигаются на углах графиков ($n_A = \pm 1, n_B = \pm 1$), причем для разных видов информации это могут быть различные углы: либо $n_A = n_B = 1$, что соответствует максимальному возбуждению двухатомной системы, либо $n_A = -n_B = 1$, когда один из атомов в начальный момент времени находится полностью в нижнем состоянии, а другой — полностью в верхнем. Общие

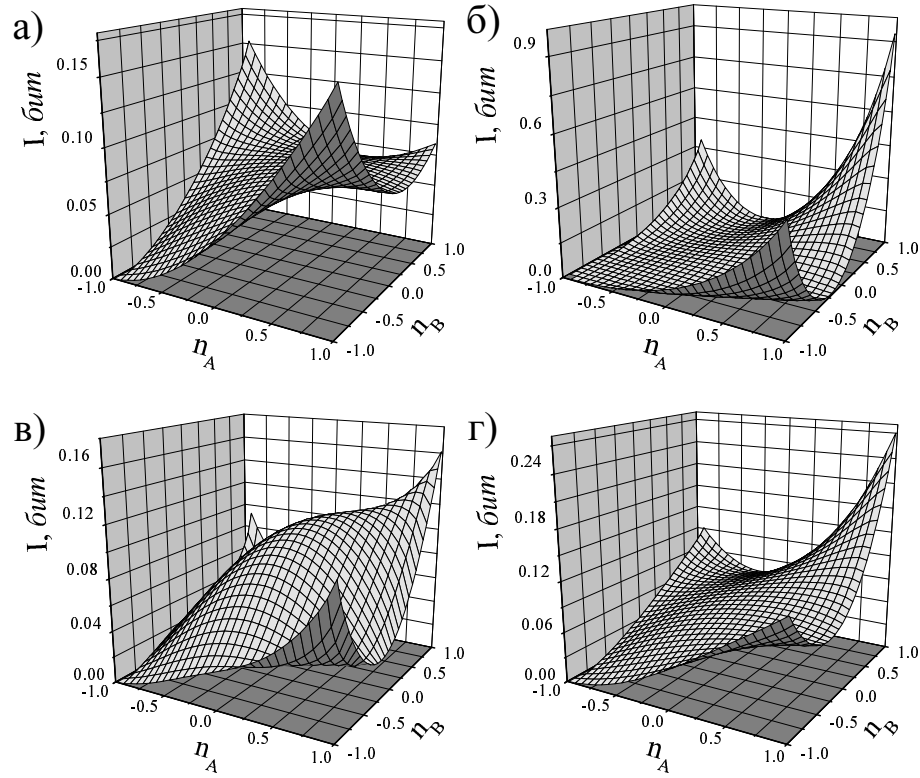


Рис. 10: Зависимость информации а) I_{us} , б) I_{11} в) $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ и г) $\langle I \rangle_{\alpha=1,\beta}$ от разностей населенностей n_A и n_B двух атомов при $\varphi = 0.4$, $\gamma t = 0.2$.

закономерности зависимостей $I(n_A, n_B)$ качественно одинаковы для всех рассматриваемых типов информации, поэтому детально обсудим только графики зависимостей неселектированной информации, представленные на рис. 10а при $\varphi = 0.4$, $\gamma t = 0.2$ и рис. 11а при $\varphi = 1$, $\gamma t = 1$.

На рис. 10а ($\varphi = 0.4$, $\gamma t = 0.2$) видно, что зависимость информации от разности населенностей не монотонна. В частности, если атомы одинаково возбуждены, то информация как функция разности населенностей с её уменьшением сначала уменьшается, затем увеличивается, а затем снова уменьшается.

На рис. 11а время и расстояние выбраны достаточно большими: $\varphi = 1$, $\gamma t = 1$, для того, чтобы показать влияние антисимметричной компоненты Дике на величину информации. Сравнивая рис. 11а с рис. 10а мы видим, что особенно заметна разница между этими графиками в плоскости симметрии, где отсутствует долгоживущая антисимметричная компонента, что следует из самого определения антисимметричной компоненты. На краях она, наоборот, максимальна. При выбранных параметрах ($\varphi = 1$, $\gamma t = 1$) короткоживущая симметричная

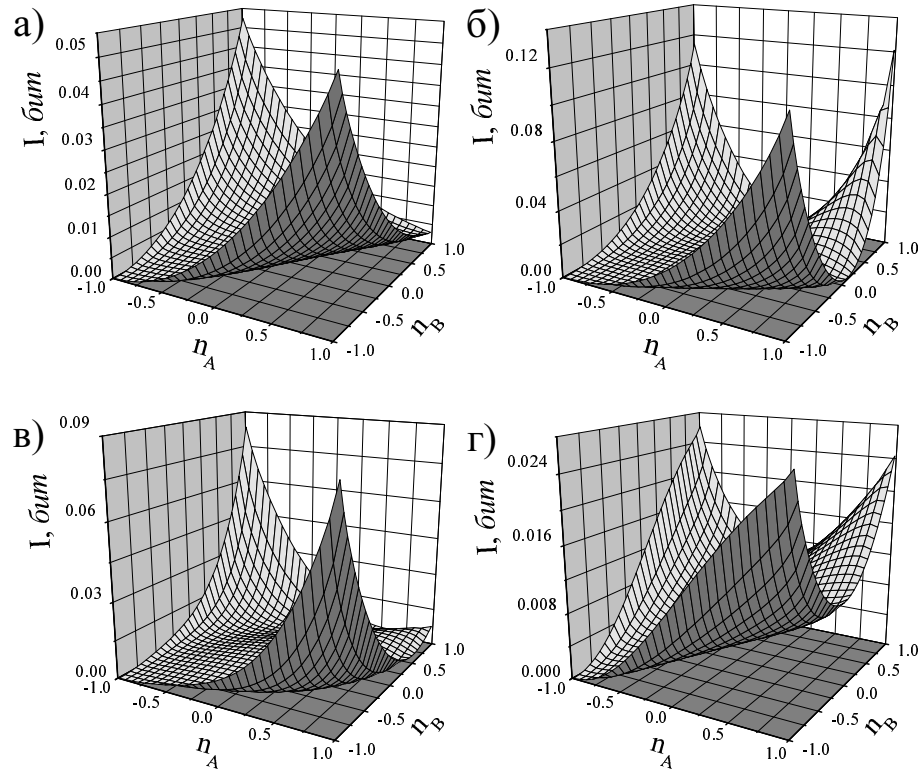


Рис. 11: Зависимость информации а) I_{us} , б) I_{11} в) $\langle I \rangle_{\alpha=\beta}$ и г) $\langle I \rangle_{\alpha=1,\beta}$ от разностей населенностей n_A и n_B двух атомов при $\varphi = 1$, $\gamma t = 1$.

компонента Дике почти полностью распалась, и информация определяется, в основном, антисимметричной компонентой. В результате информация на углах и в центре графика отличается примерно на порядок.

Для выявления характерных особенностей, не заметных на трехмерных графиках, следует рассмотреть срезы этих графиков в двух плоскостях — плоскости симметрии и перпендикулярной ей плоскости. Физически это соответствует одинаковой разности населенностей обоих атомов (срез по плоскости симметрии) и фиксированной сумме разностей населенностей (срезы в плоскостях, перпендикулярных плоскости симметрии).

Интересно отметить тот факт, что при максимально возбужденных атомах информация, тем не менее, не достигает экстремальных значений. Вообще, если атомы одинаково возбуждены и рассматривается одномерная зависимость от разности населенностей одного атома (рис. 12б), то видно, что эта зависимость немонотонна. При различных параметрах φ и γt максимум достигается в разных точках, и характер зависимости также может быть различным: может быть как один локальный максимум, так и два. Это объясняется интерференцией

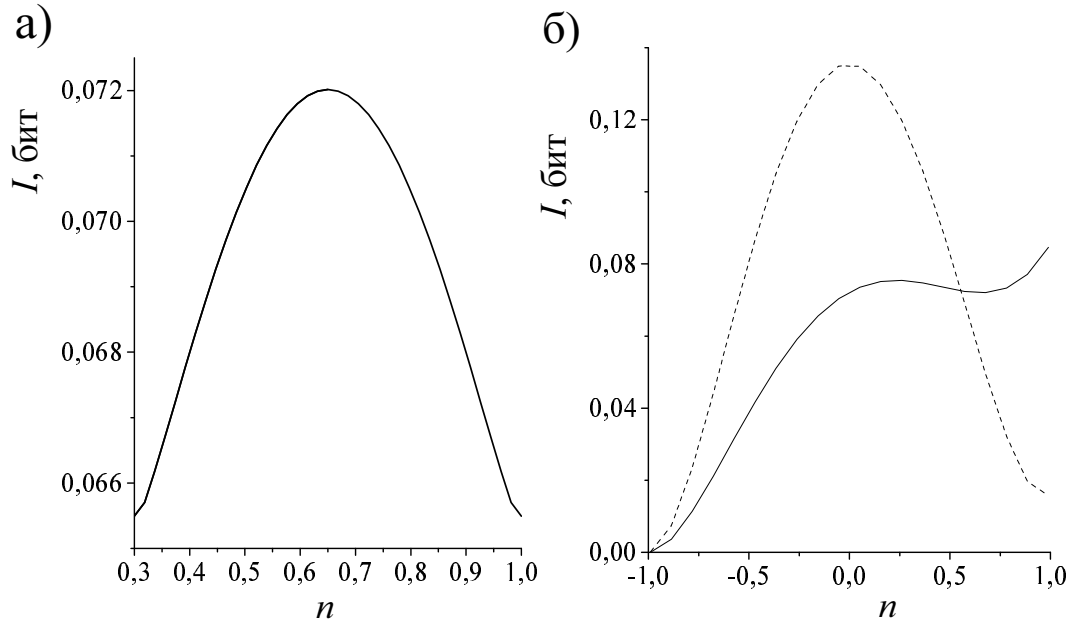


Рис. 12: Зависимость неселектированной информации I от разности населенностей n одного атома: а) фиксирована суммарная разность населенностей двух атомов $n_A + n_B = 1.3$ при $\varphi = 0.4$, $\gamma t = 0.2$; б) разность населенностей n у обоих атомов одинакова: штриховая линия — $\varphi = 0.25424$, $\gamma t = 0.01695$, сплошная — $\varphi = 0.4$, $\gamma t = 0.2$.

двух компонент, дающих ненулевой вклад в информацию, — симметричной компоненты Дике $||s\rangle\rangle$ и двухфотонного верхнего состояния $||2\rangle\rangle$.

Исследуя зависимость информации от разности населенностей одного атома при фиксированной суммарной разности населенностей обоих атомов (срез графика на рисунке 10 в плоскости, перпендикулярной плоскости симметрии графика), отметим, что почти всегда информация растет с увеличением различия в разностях населенностей атомов. Этот факт объясняется тем, что, если атомы имеют одинаковую разность населенностей, то в состоянии системы отсутствует долгоживущая антисимметричная компонента Дике, дающая основной вклад в информацию на больших временах. Если же атомы сильно отличаются своими начальными условиями, то эта компонента, наоборот, ярко выражена, и информация может достичь своих максимальных значений. Однако это справедливо не всегда, например, график на рис. 12а показывает, что информация при равных разностях населенностей атомов (центр графика) немного больше, чем в случае различных разностей населенностей. Такой характер зависимости может существовать только на малых временах благодаря влиянию короткоживущей симметричной компоненты Дике.

4 Выводы

В данной работе исследованы общие свойства совместимой информации. Введена новая операционно-инвариантная информационная характеристика на основе селектированной информации: усредненная селектированная информация с различными параметрами усреднения (10), (11).

Получены аналитические выражения (12), (13), (14), (15) различных типов усредненной информации для классически и квантово коррелированных состояний (5), (6), (7), а также показана их аналогия с классической теорией информации. Проанализирована зависимость усредненной информации для ряда переходных состояний (16), (17), (18).

Отмечен факт идентичности неселектированной информации (20) и усредненной по двум информационным состояниям селектированной информации (11).

Продемонстрирована возможность практического применения понятия совместимой информации к анализу динамических свойств взаимодействующих физических систем. Для двух-атомной задачи Дике выполнен расчёт нескольких типов совместимой информации и проанализирована их зависимость от параметров задачи. Полученные зависимости позволяют выявить качественное различие физического содержания когерентной и совместимой информации. В данной системе оно оказывается существенно связанным с качественно различной ролью коллективных возбуждений системы — состояний Дике — в формировании двух данных типов квантовой информации. Ненулевая совместимая информация связана с наличием любого частично перепутанного возбуждения в системе, в то время как когерентная информация не равна нулю, лишь если присутствуют обе компоненты Дике.

5 Благодарности

Считаю своим долгом выразить благодарность за поддержку исследований, помощь в постановке и решении задач Б.А. Гришанину. Также хочу поблагодарить В.Н. Задкова за помощь в освоении компьютерной части.

Список литературы

- [1] Gisin N et al., quant-ph/0101098

- [2] Preskill J in: *Lecture notes on Physics 229: Quantum information and computation*, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>
- [3] Steane A *Rep. Prog. Phys.* **61** 117 (1998)
- [4] Валиев К А, Кокин А А *Квантовые компьютеры: надежды и реальность* (Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001)
- [5] Whitaker M A B *Prog. Quantum Electron.* **24** 1 (2000)
- [6] Кадомцев Б Б *УФН* **164** 449 (1994)
- [7] Клышко Д Н *УФН* **168** 975 (1998)
- [8] Килин С Я *УФН* **168** 507 (1999)
- [9] Менский М Б *УФН* **170** 631 (2000)
- [10] Баргатин И В, Гришанин Б А, Задков В Н *УФН* **171**, 625 (2001)
- [11] Белокуров В В, Тимофеевская О Д, Хрусталеv О А *Квантовая телепортация — обыкновенное чудо* (Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000)
- [12] Кадомцев Б Б *Динамика и информация* (М.: Редакция журнала УФН, 2000)
- [13] Bouwmeester D, Ekert A, Zeilinger A (Eds) *The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation* (New York: Springer, 2000)
- [14] Менский М Б *Квантовые измерения и декогеренция* (М: Физматлит, 2001)
- [15] Корн Г, Корн Т *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М: Наука, 1970)
- [16] Б. А. Гришанин, *Квантовые случайные процессы*, курс находится в Интернете по адресу: <http://comsim1.phys.msu.su/publications/papers/bagbook.ps.gz>
- [17] T. Rudolph, “Quantum Information is physical too . . .”, LANL e-print, quant-ph/9904037.
- [18] В. А. Grishanin and V. N. Zadkov, *ICONO 2001 Technical Digest*, FN4, (Minsk, Belarus), June 26–July 1, 2001.

- [19] Shannon C E *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 379 (1948)
- [20] Р. Галлагер, *Теория информации и надежная связь* (Сов. Радио, Москва, 1974).
- [21] Б. А. Гришанин, “Некоторые методы решения квантовых задач обнаружения и измерения,” *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика* **11**(5), pp. 127–137, 1973.
- [22] А. С. Холево, *Пробл. передачи информ.* **9**, 31 (1973).
- [23] Hall M J W *Phys. Rev. A* **55**, 100 (1997)
- [24] Schumacher B, Nielsen M A *Phys. Rev. A* **54**, 2629 (1996)
- [25] Lloyd S *Phys. Rev. A* **55**, 1613 (1997)
- [26] H. Barnum, B. W. Schumacher and M. A. Nielsen, *Phys. Rev. A* **57**, 4153 (1998).
- [27] Б. А. Гришанин, *Проблемы передачи информации* **38**, № 1 (2002, в печати).
- [28] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 9 (1954).
- [29] B. A. Grishanin and V. N. Zadkov, *Phys. Rev. A* **62**, 032303 (2000).
- [30] Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, *ЖЭТФ* **118** № 5, 1048–1065 (2000)
- [31] Brukner C., Zeilinger A *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3354 (1999)
- [32] Р. Л. Стратонович, *Теория информации* (Сов. Радио, Москва, 1975).
- [33] Б. А. Гришанин, *частное сообщение*.
- [34] Б. А. Гришанин, *Изв. АН СССР Техническая кибернетика* **11** (5), 127 (1973).
- [35] B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, *Laser Physics* **11**, No. 11 (2001, в печати)
- [36] C. M. Caves and C. M. Fuchs, LANL e-print quant-ph/9601025(1996).
- [37] C. King, M.B. Ruskai, LANL e-print quant-ph/0004062(2000).