Семинар 1
Вычисление определенных интегралов

В. Н. Задков
Физический Факультет Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова, Москва 119899, Россия

5 февраля 2000 г.

Аннотация

Семинар знакомит с методами вычисления определенных интегралов типа $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Рассматриваются методы вычисления определенных интегралов на равномерной сетке — метод трапеций и метод Симпсона, а также один из методов вычисления интегралов на неравномерной сетке — метод квадратур Гаусса–Лежандра. Приводятся соответствующие формулы и оценки погрешности аппроксимации. Кратко рассматриваются также вопросы вычисления интегралов с особенностями и от быстроосциллирующих функций.

1 Метод трапеций

Один из самых простых методов аппроксимации подынтегральной функции состоит в ее *кусочно-линейной* интерполяции на *равномерной* сетке с шагом $h = (b-a)/N$ (считаем $a < b$), как показано на рис. 1а. При этом интеграл вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)\,dx \quad &\approx \quad I_T = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N-1} 0,5(f_n + f_{n+1})h \\ &= \quad h(0,5f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1} + 0,5f_N), \end{aligned} \tag{1}$$

которая называется *формулой трапеций*[1] [1].

1.1 Погрешность аппроксимации

Погрешность аппроксимации интеграла с помощью формулы трапеций зависит от гладкости функции f. Если она имеет на интервале $[a,b]$ вторую производную, ограниченную по величине, то погрешность формулы трапеций пропорциональна h^2 и составляет [1]

$$|I_T - I| \le \frac{h^2}{12}(b-a)\max_{a\le x\le b}(|f''(x)|). \tag{2}$$

Естественно, снижение требований на гладкость функции приводит к увеличению погрешности. Так, если функция удовлетворяет только требованию непрерывности и ограниченности на отрезке $[a,b]$ ($f(x) < C$), погрешность аппроксимации

$$|I_T - I| \le \frac{h}{2}(b-a)\max_{a\le x\le b}(|f(x)|). \tag{3}$$

2 Формулы Ньютона-Котеса

Продолжая улучшать формулы трапеций и Симпсона на равномерной сетке, можно, идя по тому же пути, получить аппроксимирующие формулы более высоких порядков. Семейство этих формул называется

[1] Аппроксимирующие формулы такого вида, $\sum \alpha_n f_n$, называются *механическими квадратурами* с весами α_n в узлах x_n.

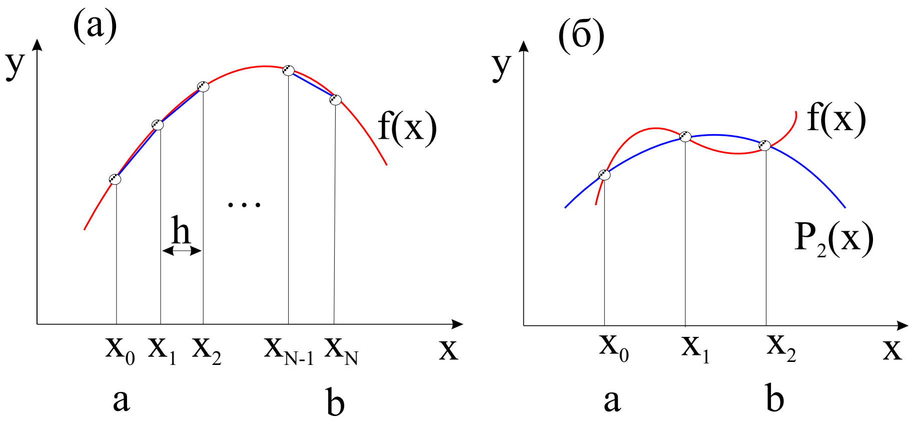

Рис. 1: Аппроксимация подынтегральной функции $f(x)$ с помощью (а) кусочно-линейной (метод трапеций) и (б) кусочно-квадратичной (метод Симпсона) интерполирующих функций на равномерной сетке. P_2 — интерполяционный полином Лагранжа второй степени.

формулами Ньютона-Котеса [2]. Не обсуждая их здесь детально, все же приведем таблицу соответствующих весов функций, используемых в аппроксимирующих формулах (см. табл. 1). На практике, однако, аппроксимирующие формулы высоких порядков (более 4—5) обычно не используются из-за существенных ошибок округления.

Таблица 1: Веса в формулах интегрирования Ньютона-Котеса.

Степень полинома	Название формулы	Веса				
1	Формула трапеций	h/2	h/2			
2	Формула Симпсона	h/3	4h/3	h/3		
3	Формула 3/8 Симпсона	3h/8	9h/8	9h/8	3h/8	
4	Формула Милна	14h/45	64h/45	24h/45	64h/45	14h/45

Список литературы

[1] Р. П. Федоренко, *Введение в вычислительную физику*. — М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.

[2] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. — М.: Физматгиз, 1968.