Нелинейные колебания.

1) Уравнение для маятника с движущейся точкой подвеса:

$$mL\ddot{\varphi} + m\ddot{x}\cos\varphi + (\ddot{y} + g)\sin\varphi = 0$$

2) Электрическая цепь:

$$L\ddot{q} + \frac{C(t)}{q} = 0 \quad \left(C(t) = \frac{S\epsilon}{4\pi d(t)} \simeq C + \delta C = C_0 + \Delta C\cos(\omega_0 t)\right)$$

3) Теорема Флоке

Приведем простейшие сведения из теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и, в частности, теорему Флоке, которая определяет структуру решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В общем случае теорема формулируется так: система с n степенями свободы, описываемая дифференциальным уравнением порядка $2n$ с периодическими коэффициентами периода T, имеет $2n$ линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему, причем каждое из этих решений имеет вид $x_i(t) = \Phi_i(t)\exp(\lambda_i t)$, где $\Phi_i(t)$ — периодическая функция с периодом T. Экспоненты $\exp(\lambda_i t)$ называют ляпуновскими экспонентами, числа λ_i — ляпуновскими характеристическими показателями, а $\Phi_i(t)$ — функциями Флоке.

Обоснование теоремы Флоке для одномерной системы 2-го порядка: $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$; причём $\omega^2(t+T) = \omega^2(t)$

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ --- два л.н.з. решения, тогда решениями также являются и:

$x_1(t+T) = \alpha_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t)$, $\quad x_2(t+T) = \alpha_2 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$.

Их всегда можно выбрать так, чтобы:

$x_1(t+T) = s_1 x_1(t)$, $\quad x_2(t+T) = s_2 x_2(t)$

Из ур-й $\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = 0$ имеем: $\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0$ и $\ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$

Поэтому:

$\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = \text{const}$ и $\dot{x}_1(t)x_2(t) - \dot{x}_2(t)x_1(t) = \dot{x}_1(t+T)x_2(t+T) - \dot{x}_2(t+T)x_1(t+T)$

Т. о. имеем $s_1 s_2 = 1$.

Введя $s_i = \exp(\lambda_i T)$ получаем общее решение $x(t) = c_1 e^{\lambda t}\Phi_1(t) + c_2 e^{-\lambda t}\Phi_2(t)$ ч.т.д.

4) Уравнение Матье:

$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - \mu b\cos\omega_p t)x = 0$ Здесь μ--- малый параметр.

5) Анализ резонансов решения ур-я Матье.

Нас интересует поведение решения при резонансном. значении частоты изменения параметра:

$\omega_p = 2\omega_0 + \mu\delta$, где $\mu\delta = \delta'$ — малая расстройка.

Т.о.: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu\omega_0^2 b\cos[(2\omega_0 + \delta')t]x$.

а)Можно искать решение методом последовательных приближений, используя разложение по μ, но это неудобно, т.к. не выделены колебания на резонансной частоте.

б) Ищем решение в виде:

$x(t) = A(\mu t)\cos[(\omega_0 + \delta'/2)t] + B(\mu t)\sin[(\omega_0 + \delta'/2)t] + \mu W^{(1)}$

Здесь A и B – ММА (dA/dt~μA, dB/dt~μB). Подставим в ур-е Матье:

$$\ddot{W}^{(1)} + \omega_0^2 W^{(1)} = \omega_0[2\dot{A} + \delta' B - (\mu b\omega_0/2)B]\sin[(\omega_0 + \delta'/2)t] + \\ + \omega_0[-2\dot{B} + \delta' A + (\mu b\omega_0/2)A]\cos[(\omega_0 + \delta'/2)t].$$

Потребуем малости $W^{(1)}$:

$\dot{A} = -(\mu/2)(\delta - \omega_0 b/2)B, \quad \dot{B} = -(\mu/2)(\delta + \omega_0 b/2)A$

ищем A, $B \sim \exp(\lambda t)$, получаем ур-е для λ:

$$\lambda^2 = -(\mu^2/4)(\delta^2 - \omega_0^2 b^2/4).$$

При достаточно малой расстройке ($-\omega_0 b/2 < \delta < \omega_0 b/2$) амплитуды A и B будут нарастать — в системе реализуется параметрическая неустойчивость. Приведенные неравенства определяют зону основного резонанса, границы которой изображены на рис.1.

Если в системе есть потери порядка $\mu\nu$, то основная зона неустойчивости будет определяться неравенствами

$$-\sqrt{\omega_0^2 b^2/4 - 4\nu^2} < \delta < \sqrt{\omega_0^2 b^2/4 - 4\nu^2},$$

где ν — декремент затухания. Откуда следует, что при наличии диссипации даже при точном резонансе ($\delta = 0$) для возникновения неустойчивости необходима конечная глубина модуляции параметра, пороговое значение которой $b = 4\nu/\omega_0$

в) Учет поправок высшего порядка μ позволяет найти области резонансов более высокого порядка: для μ^1:

$$x(t) = A(\mu t)\cos[(\omega_0 + \delta')t] + B(\mu t)\sin[(\omega_0 + \delta')t] + \mu W^{(1)}(t) + \mu^2 W^{(2)}(t)$$

(При расчетах необходимо сделать замену:
$\dot{A} = \mu F_1(A,\ B) + \mu^2 F_2(A,\ B),\ \dot{B} = \mu\varphi_1(A,\ B) + \mu^2\varphi_2(A,\ B)$)

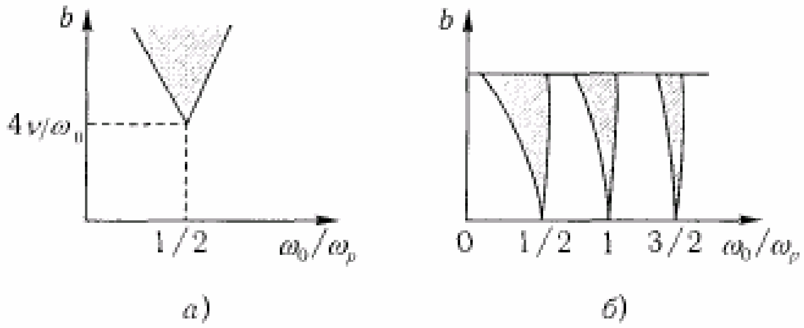

Рис. 1 Поведение областей неустойчивости, описываемое асимптотическими решениями уравнения Матье: *а* — появление порога возбуждения параметрических колебаний, возникших в результате затухания; *б* — сужение областей неустойчивости с ростом номера зоны