Одномерные краевые задачи. Уравнение теплопроводности.

Одномерное уравнение теплопроводности с постоянными к-тами.

1. Основные опредления и понятия

Уравнение переноса(ур-е Фурье) : $\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t} = -\lambda \operatorname{grad} T(r,t)$

Процесс распространения тепла в одномерном стержне описывается ур-ем:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_0(x,t) \qquad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — температура в точке x стержня в момент t, c — теплоемкость единицы массы, ρ — плотность, $c\rho$ — теплоемкость единицы длины, k — коэффициент теплопроводности, f_0 — плотность тепловых источников. В общем случае k, c, ρ, f_0 могут зависеть не только от x и t, но и от температуры $u = u(x, t)$ (квазилинейное уравнение теплопроводности) и даже от $\partial u/\partial x$ (нелинейное уравнение). Если k, c, ρ постоянны, то (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad f = \frac{f_0}{c\rho},$$

где $a^2 = k/(c\rho)$ — коэффициент температуропроводности. Без ограничения общности можно считать $a = 1$, $l = 1$. В самом деле, вводя переменные $x_1 = \frac{x}{l}$, $t_1 = \frac{a^2 t}{l^2}$, $f_1 = \frac{l^2}{a^2} f_1$ получим

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f_{11}, \quad 0 < x_1 < 1.$$

2. Общий анализ однородного ур-я теплопроводности с однородными краевыми условиями.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Решение этой задачи находится методом разделения переменных в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

λ_k и $X_k(x)$ — собственные значения и ортонормированные собственные функции задачи

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 1, \quad X(0) = X(1) = 0,$$

равные

$$\lambda_k = k^2\pi^2, \quad X_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x,$$

причем

$$(X_k, X_m) = \int_0^1 X_k(x)\, X_m(x)\, dx = \delta_{km},$$

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Коэффициенты c_k находятся из начальных условий.

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$$, т.е. $$c_k = (u_0, X_k).$$

Заметим, что решение устойчиво в силу того, что

$$\|u(t)\|^2 = (u(x, t), u(x, t)) = \sum c_k^2 e^{-2\lambda_k t}\|X_k\|^2 \leq e^{-2\lambda_1 t} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = e^{-2\lambda_1 t}\|u_0\|^2$$

так как $\|u_0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad \lambda_k > \lambda_{k-1} > \ldots > \lambda_1 = \pi^2.$

Таким образом, верна оценка $\|u(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|u_0\|, \quad \lambda_1 = \pi^2$

В силу возрастания $\lambda_k = k^2\pi^2$ с ростом k, начиная с некоторого момента t, в сумме (6) будет преобладать первое слагаемое (первая гармоника), т. е. будет иметь место приближенное равенство

$$u(x, t) \approx c_1 e^{-\lambda_1 t} X_1(x).$$

Эта стадия процесса называется *регулярным режимом.*

3.Разностные схемы для решения ур-я теплопроводности:

Введём сетку:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i t_j):\ x_i = ih,\ t_j = j\tau,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ h = 1/N,\ j = 0, 1, \ldots, L,\ \tau = T/L\}$$

Аппроксимируем производные разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \sim \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u_{\bar{x}x,i} = \Lambda u_i,$$

$$\frac{dv_i}{dt} \sim \frac{v_i(t_{j+1}) - v_i(t_j)}{\tau} = \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = (v_t)_i^j$$

Разностная схема принимает вид: $\dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma\Lambda y_i^{j+1} + (1-\sigma)\Lambda y_i^j + \varphi_i^j$

где σ — параметр, а φ_i^j — некоторая правая часть, например, $\varphi_i^j = f_i^j, \varphi_i^j = f_i^{j+1/2}$

Начальные и гр. усл-я приводят к дополнительным условиям:

$$y_0^j = u_1(t_j), \quad y_N^j = u_2(t_j), \quad y_i^0 = u_0(x_i),\ j = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leq i \leq N.$$

Схема определена на 6-точечном шаблоне

$$\begin{array}{ccc}
(x_{i-1},\, t_{j+1}) & (x_i,\, t_{j+1}) & (x_{i+1},\, t_{j+1}) \\
\times & \times & \times \\
\\
\times & \times & \times \\
(x_{i-1},\, t_j) & (x_i,\, t_j) & (x_{i+1},\, t_j)
\end{array}$$

Варианты схемы:

1) Явная схема (σ=1)

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j$$

Её 4-хточечный шаблон: $\begin{array}{ccc} & \times & \\ \times & \times & \times \end{array}$

Значения на $(j+1)$-м слое: $y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^j.$

2) Полностью неявная схема с опережением (σ=1):

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^j.$$

шаблон: $\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ & \times & \end{array}$

Для определения y_i^{j+1} из (13) получаем краевую задачу

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} = -F_i^j, \qquad 0 < i < N,$$

$$F_i^j = y_i^j + \tau\varphi_i^j, \quad y_0^{j+1} = u_1(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = u_2(t_{j+1}),$$

которая решается методом прогонки.

3) Симметричная явно-неявная схема(схема Кранка-Николсона) (σ=1/2)

Значения y_i^{j+1} на новом слое и в этом случае находятся методом прогонки для краевой задачи:

$$\frac{\tau}{2h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{2h^2} y_{i-1}^{j+1} = -F_i^j, \quad 0 < i < N,$$

$$y_0^{j+1} = u_1(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = u_2(t_{j+1}),$$

$$F_i^j = \left(1 - \frac{\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau}{2h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^j.$$

В общем случае (при любом σ) схема (10) называется *схемой с весами*. При $\sigma \neq 0$ она неявная и y_i^{j+1} определяется методом прогонки как решение задачи

$$\sigma\tau\Lambda y_i^{j+1} - y_i^{j+1} = -F_i^j, \quad 0 < i < N,$$

$$y_0^{j+1} = u_1(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = u_2(t_{j+1}), \qquad j = 0, 1, \ldots$$

4. Оценка погрешности аппроксимации

Пусть $u = u(x_i, t_j)$ — точное решение исходной задачи, а y — решение разностной задачи. Пусть $z = y - u$

Тогда имеем:

$z_t = \Lambda z^{(\sigma)} + \psi$, где $z^{(\sigma)} = \sigma z_i^{j+1} + (1-\sigma) z_i^j$,

ψ — погрешность аппроксимации схемы

Имеем:

$$\psi = O(\tau + h^2) \text{ при } \varphi = f \text{ и } \sigma \neq \frac{1}{2},$$

$$\psi = O(\tau^2 + h^2) \text{ при } \varphi = \bar{f} \text{ и } \sigma = \frac{1}{2}.$$

$$\psi = O(h^4 + \tau^2) \text{ при } \varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} L\bar{f} \text{ или } \varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}\Lambda\bar{f}$$

(оба выражения отличаются па величину $O(h^4)$

$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ **Здесь** $\bar{f} = f\left(x, t_j + \frac{1}{2}\tau\right)$

Решение одномерной краевой задачи 2-го порядка методом прогонки.

Задача

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (1)$$
$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2$$

представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей размера $(N+1) \times (N+1)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\varkappa_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i & -c_i & b_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\varkappa_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вместо (1) можно написать

$$Ay = f, \quad y = (y_0, y_1, \ldots, y_N), \quad f = (\mu_1, -f_1, \ldots, -f_{N-1}, \mu_2). \tag{2}$$

В случае первой краевой задачи соответствующая матрица имеет размерность $(N-1)\times(N-1)$.

Для решения краевой задачи (1) можно использовать следующий метод исключения, называемый *методом прогонки*. Предположим, что имеет место соотношение

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \tag{3}$$

с неопределенными коэффициентами α_{i+1} и β_{i+1}, и подставим $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ в (1):

$$(a_i\alpha_i - c_i) y_i + b_i y_{i+1} = -(f_i + a_i\beta_i),$$

сравнивая это тождество с (3), находим

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{4}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Используем краевое условие при $i = 0$ для определения α_1, β_1. Из формул (3) и (1) для $i = 0$ находим

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \quad \beta_1 = \mu_1. \tag{6}$$

Зная α_1 и β_1 и переходя от i к $i+1$ в формулах (4) и (5), определим α_i и β_i для всех $i = 2, 3, \ldots, N$. Вычисления по формуле (3) ведутся путем перехода от $i+1$ к i (т. е. зная y_{i+1}, находим y_i), и для начала этих вычислений надо задать y_N. Определим y_N из краевого условия $y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2$ и условия (3) при $i = N-1$: $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$. Отсюда находим

$$y_N = \frac{\mu_2 + \varkappa_2\beta_N}{1 - \alpha_N\varkappa_2}. \tag{7}$$

Соберем все формулы прогонки и запишем их в порядке применения:

$$\overset{(\to)}{\alpha_{i+1}} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \alpha_1 = \varkappa_1; \tag{8}$$

$$\overset{(\to)}{\beta_{i+1}} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \beta_1 = \mu_1; \tag{9}$$

$$\overset{(\leftarrow)}{y_i} = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1, 0,$$

$$y_N = \frac{\mu_2 + \varkappa_2\beta_N}{1 - \alpha_N\varkappa_2}. \tag{10}$$

Стрелки показывают направление счета: $(\to)$ от i к $i+1$, $(\leftarrow)$ — от $i+1$ к i.

Таким образом, краевая задача для уравнения второго порядка сведена к трем задачам Коши для уравнений первого порядка.

Другие варианты метода прогонки. Рассмотренный выше метод прогонки (8)—(10), при котором определение y_i производится последовательно справа налево, называют *правой прогонкой*. Аналогично выписываются формулы *левой прогонки*:

$$\overset{(\leftarrow)}{\xi_i} = \frac{a_i}{c_i - b_i\xi_{i+1}}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1, \quad \xi_N = \varkappa_2, \tag{13}$$

$$\overset{(\leftarrow)}{\eta_i} = \frac{b_i\eta_{i+1} + f_i}{c_i - b_i\xi_{i+1}}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1, \quad \eta_N = \mu_2, \tag{14}$$

$$\overset{(\to)}{y_{i+1}} = \xi_{i+1}y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \quad y_0 = \frac{\mu_1 + \varkappa_1\eta_1}{1 - \xi_1\varkappa_1}. \tag{15}$$

В самом деле, предполагая, что $y_{i+1} = \xi_{i+1}y_i + \eta_{i+1}$, исключим из (1) y_{i+1}; получим

$$-f_i = a_iy_{i-1} + (b_i\xi_{i+1} - c_i)y_i + b_i\eta_{i+1},$$

или

$$y_i = \frac{a_i}{c_i - b_i\xi_{i+1}}y_{i-1} + \frac{f_i + b_i\eta_{i+1}}{c_i - b_i\xi_{i+1}}.$$

Сравнивая с формулой $y_i = \xi_i y_{i-1} + \beta_i$, получим (13) и (14). Значение y_0 находим из условия $y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1$ и формулы $y_0 = \xi_1 y_1 + \eta_1$.

Комбинация левой и правой прогонок дает *метод встречных прогонок*. В этом методе в области $0 \leqslant i \leqslant i_0 + 1$ по формулам (8), (9) вычисляются прогоночные коэффициенты α_i, β_i, а в области $i_0 \leqslant i \leqslant N$ по формулам (13), (14) находятся ξ_i и η_i. При $i = i_0$ производится сопряжение решений в форме (10) и (15).

Из формул $y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} y_{i_0+1} + \beta_{i_0+1}$, $y_{i_0+1} = \xi_{i_0+1} y_{i_0} + \eta_{i_0+1}$ находим

$$y_{i_0} = \frac{\beta_{i_0+1} + \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0}}{1 - \alpha_{i_0+1}\xi_{i_0+1}}.$$

Эта формула имеет смысл, так как хотя бы одна из величин $|\xi_{i_0+1}|$ или $|\alpha_{i_0+1}|$ в силу (11) меньше единицы, и, следовательно, $1 - \alpha_{i_0+1}\xi_{i_0+1} > 0$. Зная y_{i_0}, можно по формуле (10) найти все y_i при $i < i_0$, а по формуле (15) — значения y_i при $i > i_0$. Вычисления при $i > i_0$ и $i < i_0$ проводятся автономно (имеет место распараллеливание вычислений). Метод встречных прогонок особенно удобен, если, например, требуется найти y_i лишь в одном узле $i = i_0$.